

*На правах рукописи*

*Леонтьев Валерий Геннадьевич*

**АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ И  
ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ  
И ПРОФИЛЕЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕТОК**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**КАЗАНЬ – 2003**

Работа выполнена в Отделе краевых задач Научно-исследовательского института математики и механики им Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор *Поташев Андрей Валерьевич*

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
чл.-корр. АНТ, заслуженный деятель  
науки РФ и РТ, профессор  
*Кузнецов Аркадий Васильевич*

кандидат физико-математических наук,  
старший преподаватель Михайловского  
военного артиллерийского университета  
*Галяутдинов Марат Ильдарханович*

Ведущая организация: Казанский государственный технический  
университет им. А.Н.Туполева, г. Казань.

Защита состоится 30 октября 2003г. в 14 часов 30 минут на заседании  
диссертационного совета Д212.081.11 при Казанском государственном  
университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского  
государственного университета.

Автореферат разослан 29 сентября 2003г.

Ученый секретарь диссертационного совета  
кандидат физ.-мат. наук, доцент



А.А. Саченков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность работы.** При разработке и проектировании летательных аппаратов, различного рода турбомашин, экранопланов очень важной проблемой является обеспечение оптимальных аэрогидродинамических свойств несущих элементов, гидродинамических решеток и лопаток рабочих колес. В данной работе рассмотрены методы аэродинамической оптимизации, применяемые для нахождения формы профиля с наилучшими аэродинамическими характеристиками. Основное внимание уделено постановке и решению "модельных" задач. При их формулировке, как правило, используются простые модели и топологии течения. Это позволяет построить аналитические решения и сделать выводы об их оптимальных аэродинамических характеристиках. Другой способ решения задач аэродинамической оптимизации основан на разработке численных методов их решения. Основная проблема при реализации такого подхода состоит в наиболее удобном математическом описании оптимизируемых величин и накладываемых на искомое решение ограничений. Применение методов аэродинамической оптимизации позволяют получать оптимальные крыловые профили, при этом удается преодолеть трудности, связанные с использованием прямых и обратных методов аэродинамического проектирования.

**Целью настоящей диссертации** является разработка методов оптимизации форм крыловых профилей и профилей гидродинамических решеток; построение профилей с кусочно-постоянным распределением скорости, аналитическое исследование максимальности коэффициента подъемной силы в данном классе профилей; постановка и решение оптимизационных задач для бесконечно-тонких профилей крыльев и гидродинамических решеток, телесных профилей, обладающих оптимальными аэродинамическими характеристиками.

**Научная новизна.** В диссертации поставлена и решена задача построения крылового профиля, вдоль контура которого задано распределение скорости в виде кусочно-постоянной функции. Доказано, что для рассмотренного класса имеется максимум подъемной силы  $C_y = 2e$ . Построено численное решение задачи нахождения формы бесконечно-тонких профилей, обладающих максимальной подъемной силой, в неограниченном потоке и при наличии плоского экрана. Поставлена и решена задача построения прямой гидродинамической решетки бесконечно-тонких профилей с заданными параметрами на входе и выходе, обладающей минимальным коэффициентом сопротивления и

обтекаемой безотрывно. На основе разработанных алгоритмов построено решение задачи нахождения телесного профиля с оптимальными аэродинамическими характеристиками в неограниченном потоке и при наличии экрана. Основное преимущество разработанных методов оптимизации является то, что выбранная математическая модель и метод решения позволяют записать оптимизируемый функционал и накладываемые ограничения через одну функцию, которая выбиралась в качестве управляющей. При этом решение задачи отыскивается сразу в физической области без использования вспомогательных областей.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается обоснованным применением математических моделей, строгостью применяемого математического аппарата. В численных решениях сравнение с известными решениями дало удовлетворительное совпадение.

**Практическая ценность.** Разработанные в диссертации методы, полученные решения задач, вычислительные алгоритмы и рассчитанные профили могут использоваться для проектирования крыловых профилей, гидродинамических решеток и экранопланов.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались: на научных семинарах отдела краевых задач (руководитель – Н.Б. Ильинский), на итоговых научных конференциях Казанского государственного университета (секция аэрогидромеханика) за 1997–2002 гг., Всероссийской молодежной научной Школе-конференции по математическому моделированию, геометрии и алгебре (Казань, 1997), Всероссийской молодежной научной Школе-конференции по теории функций (Казань, 1998), Всероссийской научной конференции “Краевые задачи и их приложения” (Казань, 1999), XXII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2000), Международной научно-технической конференции “Техно-экономические проблемы промышленного производства” (Набережные Челны, 2000), Международном семинаре “Нелинейное моделирование и управление” (Самара, 2000), Международной научно-технической конференции молодых ученых и специалистов “Современные проблемы аэрокосмической науки и техники” (Жуковский, 2000, 2002), Международной научной конференции и молодежной школе “Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения” (посвященной 90-летию Г.Г.Тумашева) (Казань, 2000), V Казанской международной летней школе-конференции “Теория функций, ее приложения и смежные вопросы” (Казань, 2001), VIII Всероссийском съезде механиков по теоре-

тической и прикладной механике (Пермь, 2001), Итоговой конференции Республиканского конкурса научных работ среди студентов и аспирантов на соискание премии имени Н.И. Лобачевского (Казань, 2002), VIII Четаевской международной конференции “Аналитическая механика, устойчивость и управление движением” (Казань, 2002), Международной летней научной школе “Гидродинамика больших скоростей” (Чебоксары, 2002), Международной молодежной научной школе-конференции “Лобачевские чтения – 2002” (Казань, 2002), XV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции “Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий” (Казань, 2003), совместных российско-немецких научных семинарах (Штутгарт, 2002; Казань, 2003).

**Публикации.** Основное содержание диссертации опубликовано в 13 работах, список которых приведен в конце автореферата.

**Содержание, структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, содержащих девять параграфов, заключения и списка литературы. Содержит 108 страниц, 12 таблиц, 37 рисунков. Библиографический список состоит из 63 наименования источников отечественных и зарубежных авторов.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дан обзор литературы по существующим методам проектирования крыловых профилей и профилей гидродинамических решеток, кратко изложено содержание диссертации, сформулированы выносимые на защиту положения.

В настоящее время наибольшее развитие и применение в инженерной практике находят **прямые методы** проектирования. Суть таких методов состоит в последовательном решении прямой задачи с последующей модификацией формы профиля для достижения наилучшего совпадения получаемых свойств с желаемыми. Однако, обладающие высокой эффективностью, они позволяют находить характеристики уже готового объекта.

Множество трудностей, связанных с применением прямых методов удается преодолеть с помощью **обратных методов** аэродинамического проектирования (построение профиля по заданному распределению скорости или давления). Теоретическую основу обратных методов со-

ставляют ОКЗА (обратные краевые задачи аэрогидродинамики). Первые постановки и решения таких задач описаны в работах F. Weinig'a, A. Betz'a, W. Mangler'a, Л.А. Симонова, Г.Г. Тумашева, М.Т. Нужи́на, М.Ж. Lighthill'a.

Существенной особенностью ОКЗА является тот факт, что произвольным исходным данным соответствует, как правило, физически нереализуемое решение задачи, то есть контур получаемого профиля может оказаться незамкнутым и самопересекающимся.

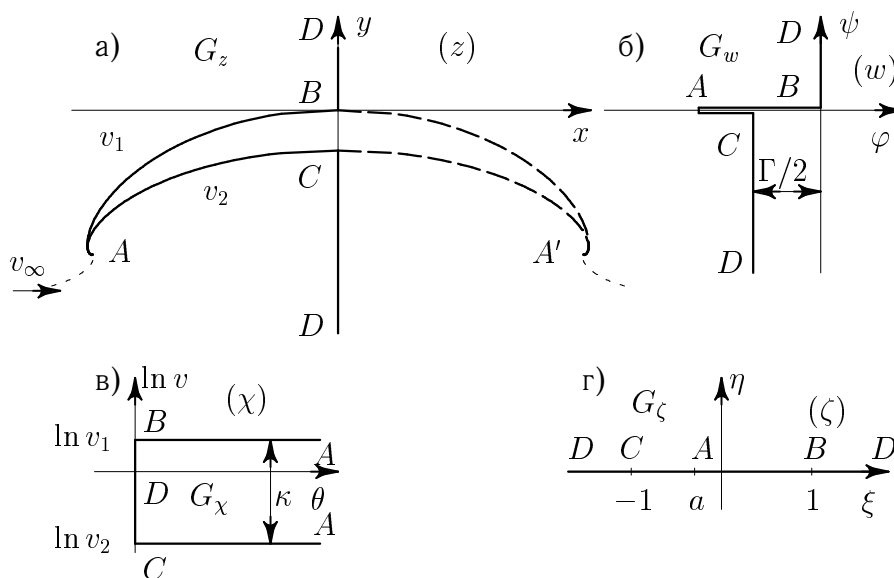
В работе А.М. Елизарова, Н.Б. Ильинского, А.В. Поташева разработан метод построения квазирешения ОКЗА, состоящий в минимальной коррекции исходного распределения скорости  $v(s)$  с тем, чтобы удовлетворить условиям разрешимости. Однако, применение квазирешения для замкнутости контура может очень сильно изменить исходное распределение скорости.

Таким образом, прямые и обратные методы не дают полной возможности нахождения оптимальных аэродинамических форм, удовлетворяющих различным ограничениям. Решение таких задач возможно при использовании подхода, основанного на использовании **методов аэродинамической оптимизации**.

Первый подход к нахождению оптимальных форм состоит в постановке и решении "модельных" задач. При их формулировке, как правило, используются простейшие модели. Это позволяет построить аналитические решения и сделать выводы об оптимальных аэродинамических характеристиках.

Именно такой подход использовался в работе М.А. Лаврентьева, который доказал, что решением вариационной задачи о дуге максимальной подъемной силы заданной длины и ограниченной кривизны в потоке идеальной несжимаемой жидкости, является дуга окружности.

Второй подход к задачам аэродинамической оптимизации основан на разработке численных методов их решения. В том случае, когда описание оптимизируемых величин и ограничений дается через форму профиля, приходят к методам проектирования, которые заключаются в разработке итерационных процессов, в которых на каждом очередном шаге после решения прямой задачи осуществляется модификация геометрии контура профиля. Такие методы, объединяющие решение прямой задачи аэродинамики и нелинейные методы оптимизации, обеспечивающие достижение экстремальных значений аэродинамических характеристик, использовались в работах С.М. Аульченко.



Фиг. 1.

Более быстродействующие методы базируются на описании оптимизируемых величин и ограничений через решение ОКЗА. Именно такой способ решения содержится в работах А.М. Елизарова и Е.В. Федорова, Д.Ф. Абзалилова и Н.Б. Ильинского, А.Н. Ихсановой и Д.А. Фокина.

В **первой главе** рассмотрен ряд задач о построении формы крылового профиля, вдоль контура которого задано распределение скорости в виде кусочно-постоянной функции. Такой способ задания обеспечивает отсутствие на контуре профиля участков падения скорости и, тем самым, отсутствие отрыва потока.

В §1 поставлена и решена задача о нахождении профиля с двумя участками постоянной скорости. Искомый профиль обтекается установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной на бесконечности скоростью  $v_\infty$ , параллельной оси абсцисс. Требуется найти форму крылового профиля и коэффициент подъемной силы, если модули скорости на верхней и нижней поверхностях постоянны и равны  $v_1$  и  $v_2$ , соответственно ( $v_1 > v_2$ ), а длина верхней части контура равна  $L$ . Кромки профиля  $A$  и  $A'$  (фиг. 1) являются особыми точками – точками разветвления и схода потока, в которых скорости терпят разрыв. В этих точках границы контура образуют логарифмические завитки конечной длины.

При решении задачи, в силу симметрии исходных данных, достаточно рассмотреть только левую половину  $G_z$ . Далее строятся области  $G_w$  (фиг. 1,б) и  $G_\chi$  (фиг. 1,в), соответствующие области течения  $G_z$  в плос-

костях комплексного потенциала  $w = \varphi + i\psi$  и функции Жуковского–Мичелла

$$\chi = i \ln \left( \frac{dw}{dz} \right) = \theta + i \ln v, \quad (1)$$

где  $v$  – модуль скорости,  $\theta$  – ее аргумент.

В качестве канонической области выбрана верхняя полуплоскость  $G_\zeta$  в плоскости вспомогательного переменного  $\zeta = \xi + i\eta$  с соответствием точек, показанным на фиг. 1,г. Конформные отображения области  $G_\zeta$  на области  $G_w$  и  $G_\chi$  записываются с помощью формул Кристоффеля–Шварца.

Условие замкнутости записано в следующем виде

$$v_1 = \exp \left( \frac{\kappa}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\kappa} \right), \quad (2)$$

где  $\kappa = \ln(v_1/v_2)$ , с учетом которого получим, что для построения профиля с замкнутым контуром заданной можно считать лишь безразмерную величину  $\kappa$ , а сами скорости следует находить из условия (2) и равенства  $v_2 = v_1 e^{-\kappa}$ . Таким образом, решение задачи зависит от одного безразмерного параметра  $\kappa$ .

Координаты искомого контура профиля, с учетом (1), определяются по формуле

$$z(\zeta) = \frac{1}{v_\infty} \int_1^\zeta e^{i\chi(t)} w'(t) dt.$$

При этом найден максимум коэффициента подъемной силы

$$C_{y \max} = 2e \approx 5,44.^1$$

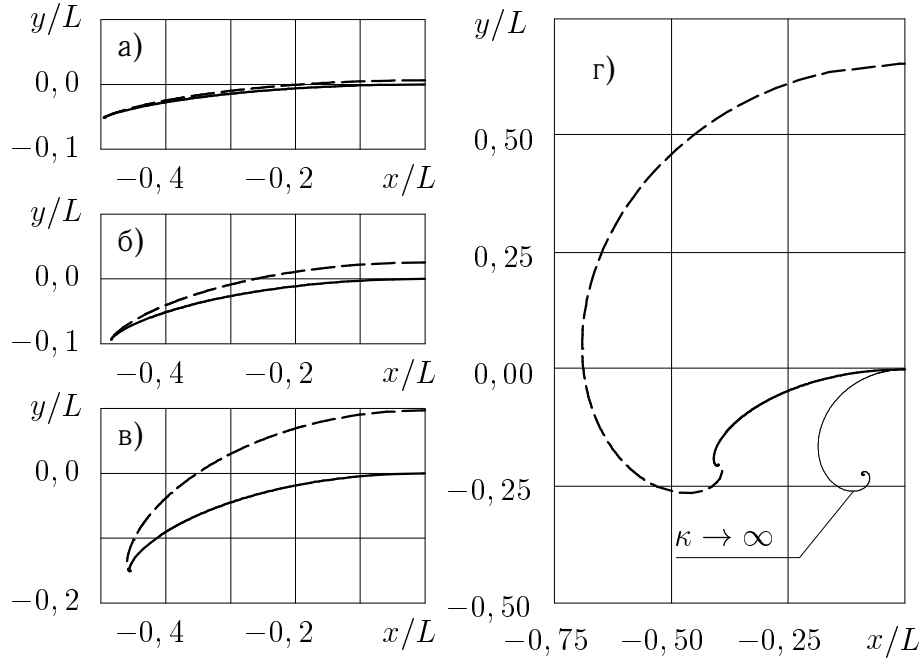
Результаты расчетов формы профилей показали, что при любых числах  $\kappa \neq 0$  области течения получаются неоднолистными (фиг. 2 и табл. 1): нижние поверхности профилей, изображенные штриховыми линиями, располагаются выше верхних – сплошные линии.

С ростом  $\kappa$  нижняя поверхность все сильнее “выпирает” вверх и при  $\kappa \rightarrow \infty$  уходит в бесконечность. Верхняя поверхность при этом стремится к предельной, описываемой формулой

---

<sup>1</sup>Этот любопытный факт отметил Г. Ю. Степанов в частном письме Н. Б. Ильинскому 6.04.1997.





Фиг. 2.

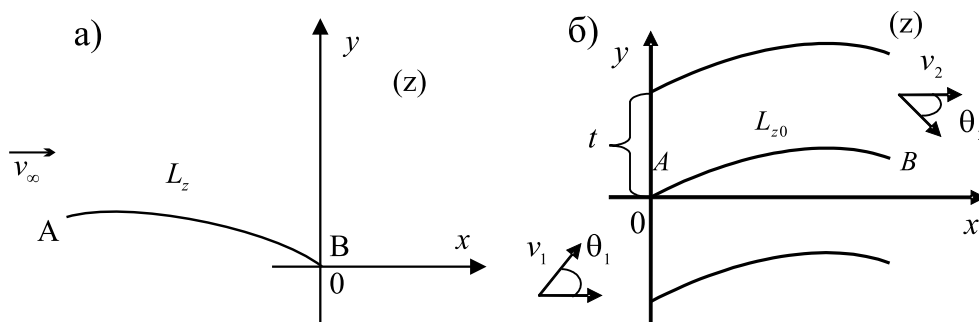
Таблица 1.

$N$	Фиг.	$\kappa$	$v_1$	$v_2$	$C_y$
1	3,а	0,5	1,25	0,76	0,98
2	3,б	1,0	1,49	0,55	1,87
3	3,в	2,0	1,89	0,26	3,21
4	3,г	5,0	2,44	0,02	4,78
5	3,г	$\infty$	$e$	0	$2e$

$$z(\xi) = -\frac{2L}{\pi} \int_0^{\xi} e^{i\pi\xi} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)}, \quad \xi \in [0, \infty).$$

Эта предельная граница показана на фиг. 2,г тонкой сплошной линией.

Для построения однолистных профилей предложено поместить точку разрыва скорости на верхнюю поверхность профиля – решение этой задачи содержится в §2. При этом кромки профиля стали точками возврата, а завитки логарифмических спиралей переместились на верхнюю поверхность профиля. Исследование свойств решения задачи и числовые расчеты проведены в полуобратной постановке. С учетом условий однолистности контура профиля построена область допустимых значений параметров. Исследования наличия глобального максимума  $C_y$  в



Фиг. 3.

этой задаче проведено численно.

В §3 предложено заменить логарифмическую особенность в точке скачка скорости на плоский кольцевой полубесконечный канал. Несмотря на то, что введенный канал является бесконечным, он удовлетворительно моделирует реальные однолистные каналы конечной длины. Построены области допустимых значений параметров, обеспечивающие однолистность течения.

Наряду с построением крыловых профилей в неограниченном потоке представляет также интерес получение форм профилей и при наличии плоского горизонтального экрана (профиль крыла экраноплана). Вычисления в этой области были проведены в §4. В нём также исследовано влияние отстояния профиля от экрана на коэффициент подъемной силы.

**Вторая глава** содержит постановки и решение ряда задач по оптимизации формы бесконечно-тонких профилей в неограниченном потоке и при наличии плоского экрана, обладающих максимальной подъемной силой. Разработанный метод распространен и на случай проектирования прямой однорядной гидродинамической решетки бесконечно-тонких профилей.

В §5 дана постановка и численно-аналитическое решение задачи определения формы бесконечно-тонкого профиля в безграничном потоке, обладающего максимальной подъемной силой. Искомый крыловой профиль, моделируемый в физической плоскости  $z = x + iy$  криволинейным непроницаемым отрезком  $L_z$  длины  $L$ , обтекается плоско-параллельным потоком ИНЖ со скоростью  $v_\infty$  на бесконечности (фиг. 3,а). Требуется найти форму профиля из условия максимизации величины коэффициента подъемной силы  $C_y$ .

Сначала рассмотрена вспомогательная задача, состоящая в отыска-

нии формы профиля при заданных параметрах  $v_\infty$ ,  $L$  и функции  $\lambda(s)$ , описывающей скачок величины скорости на разных сторонах профиля.

Для решения этой задачи введена аналитическая в физической плоскости  $z$  за исключением контура  $L_z$  функция

$$\chi = \ln \frac{dw}{dz} = \ln v - i\theta, \quad (3)$$

где  $w = \varphi + i\psi$  – комплексный потенциал течения,  $\varphi$  – потенциал скорости,  $\psi$  – функция тока,  $v$  – величина скорости,  $\theta$  – ее аргумент.

Эта функция должна удовлетворять следующим условиям: условию заданности скорости на  $\infty$ ; условию непротекания контура  $L_z$ ; условию заданности величины скачка действительной части функции  $\chi(z)$  на  $L_z$ , описываемого функцией  $\lambda(s)$  дуги  $s$  контура  $L_z$ .

Если предположить, что форма  $L_z$  и функция  $\lambda(s)$ , описывающая скачок скорости, известны, то решение краевой задачи запишется в виде:

$$\chi(z) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} \frac{\lambda(s(t)) dt}{t - z}. \quad (4)$$

Для определения контура  $L_z$  по заданному распределению  $\lambda(s)$  используется итерационный процесс. В качестве начального приближения формы  $L_z$  задается значение угла наклона касательной  $\Theta_m^{(0)}$  в каждой расчетной точке  $s_m \in [0, 1]$ ,  $m = \overline{1, M}$  контура  $L_z$  (можно положить  $\Theta_m^{(0)} = 0$ , что соответствует горизонтальному прямолинейному отрезку).

Затем, по формуле  $z^{(n+1)}(s) = \int_s^1 \exp(i\Theta^{(n)}(s)) ds$  находится форма  $L_z$ .

Далее отыскивается функция  $\chi^{(n+1)}(z)$  в виде (4), определяются новые значения  $\Theta_m^{(n+1)} = \theta_m^{(n+1)}$  и сравниваются с предыдущими значениями  $\Theta_m^{(n)}$ . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left| \Theta_m^{(n+1)} - \Theta_m^{(n)} \right| < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданное малое число,  $M$  – количество расчетных точек на  $L_z$ .

Таким образом, задание функции  $\lambda(s)$  полностью определяет форму контура и её можно использовать в качестве управляющей функции при решении оптимизационных задач.

При численной реализации решения задачи управляющая функция  $\lambda(s)$  бралась в виде

$$\lambda(s) = \sqrt{s(1-s)} \sum_{k=0}^{N-1} a_k s^k,$$

где  $a_k$  – параметры оптимизации,  $N$  – их количество.

Первые два сомножителя обеспечивают равенство скоростей на верхней и нижней сторонах кромок профиля, что необходимо для выполнения условия плавного натекания и схода потока.

Для определения формы контура  $L_z$ , обладающего максимальной подъемной силой, в качестве минимизируемого функционала выбирался коэффициент подъемной силы с обратным знаком:

$$J = -\frac{2Y}{\rho v_\infty^2 L} = \int_{L_z} (c_p^+(x) - c_p^-(x)) dx, \quad (5)$$

где  $c_p = 1 - (v/v_\infty)^2$  – коэффициент давления.

В случае решения задачи М. А. Лаврентьева на искомое решение также накладывалось ограничение, что в каждой точке контура  $L_z$  максимальное значение кривизны ( $K(s) = d\Theta/ds$ ) не превышает своего критического значения  $K_0$ . Данное ограничение учитывалось в виде штрафной функции в оптимизируемом функционале в следующем виде

$$\tilde{J}_1 = J + \lambda_1 \max(0, K_{\max} - K_0). \quad (6)$$

где  $\lambda_1$  – коэффициент штрафа.

Еще одно из возможных ограничений на функцию  $\lambda(s)$  и форму  $L_z$  – это условие безотрывности обтекания. В частности, если воспользоваться условием отсутствия отрыва полностью турбулентного пограничного слоя из метода Кочина-Лойцянского, то его можно записать в виде

$$f^\pm(s) \geq f_0, \quad (7)$$

где

$$f^\pm(s) = \frac{a [v^\pm(s)]'}{[v^\pm(s)]^b} \int_0^s [v^\pm(s)]^{b-1} ds, \quad v^\pm(s) = \exp\{Re[\chi^\pm(z)]\}|_{z \in L_{z0}},$$

$$a = 1.17, \quad b = 5.35, \quad f_0 = -2.$$

В этом случае минимизируемый функционал с учетом ограничения (7) записывается в виде

$$\tilde{J}_2 = J + \lambda_2 \max(0, \bar{f} - 1), \quad (8)$$

где  $\bar{f} = f/f_0$  – приведенный формпараметр,  $\lambda_2$  – коэффициент штрафа.

Наряду с отысканием профилей, обладающих максимальным значением  $C_y$ , представляет интерес построение профилей минимального сопротивления. В этом случае оптимизируемый функционал будет иметь вид

$$J = C_x, \quad (9)$$

где коэффициент сопротивления  $C_x$  рассчитывался по формуле Сквайра-Юнга:  $C_x = 2(v_*/v_\infty)^{3.2}(\delta_0^{**}/L)$ . Здесь  $v_*$  – величина скорости в задней кромке,  $\delta_0^{**}$  – суммарная толщина потери импульса в задней кромке.

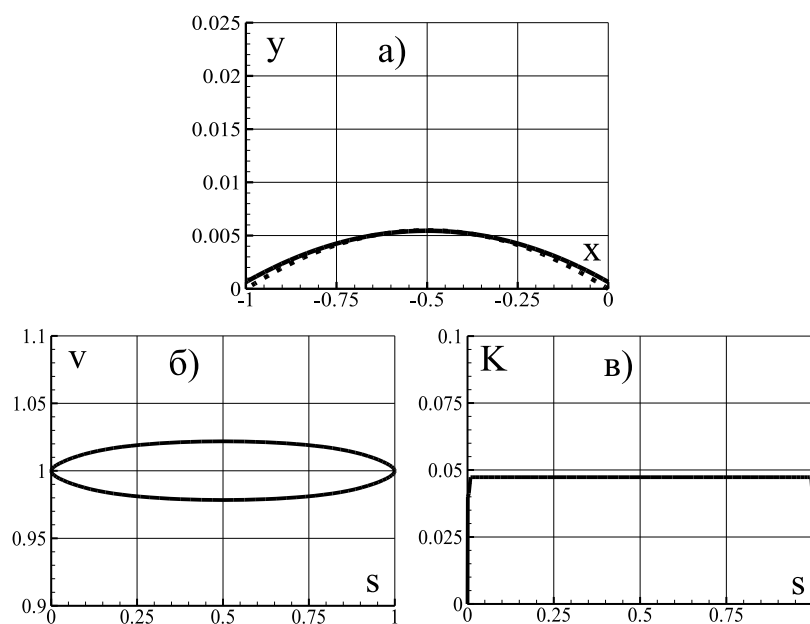
На функционал (9) также можно наложить дополнительные ограничения в виде (6) или (8).

Еще одна из возможных задач оптимизации – определение контура  $L_z$  с максимальным аэродинамическим качеством  $K = C_y/C_x$ . В данном случае переходим к следующему оптимизируемому функционалу

$$J = -K = -C_y/C_x.$$

Одна из серий расчета была посвящена нахождению формы контура  $L_z$ , обладающего максимальной подъемной силой с ограничением на кривизну контура, то есть проводилось сравнение с результатами, полученным М. А. Лаврентьевым. В качестве оптимизируемого брался функционал (6).

На фиг. 4 представлены результаты вычислений при  $K_0 = 1/21$  (результат М. А. Лаврентьева). Сплошной линией на фиг. 4,а показана форма кривой, полученная численно в результате оптимизации, штриховой линией изображено точное решение, то есть дуга окружности с радиусом  $r = 1/K_0 = 21$ . Для наглядности масштаб по оси  $Ox$  взят значительно большим, чем по оси  $Oy$ . Из приведенных результатов, видно, что формы кривых совпадают с хорошей степенью точностью. Соответствующее распределение скорости показано на фиг. 4,б; график распределения кривизны – на фиг. 4,в. Кривизна при этом близка предельному значению  $K_0 = 1/21$ . Следовательно, в результате максимизации



Фиг. 4.

$C_y$  получилась дужка  $L_z$  с постоянной кривизной  $K_0 = 1/21$ . Значение коэффициента подъемной силы получилось равным  $C_y = 0.0676$ .

Для сравнения полученных расчетов с результатами работы Н.Б.Ильинского и А.В.Поташева<sup>2</sup> проводились вычисления по нахождению формы  $L_z$  с максимальной подъемной силой с выполнением условия безотрывности обтекания. Найденный контур  $L_z$  по форме близок к контуру из вышеназванной работы, однако, значение коэффициента подъемной силы получилось  $C_y = 0.684$ , что несколько больше, чем в работе Н.Б.Ильинского и А.В.Поташева ( $C_y = 0.670$ ). Увеличение  $C_y$  произошло за счет улучшения алгоритма расчета.

В §6 дана постановка и построено решение задачи определения формы бесконечно-тонкого профиля, обладающего максимальной подъемной силой при наличии экрана. Искомый крыловой профиль, моделируемый в физической плоскости  $z$  криволинейным непроницаемым отрезком  $L_z$  длины  $L$ , обтекается вблизи прямолинейного экрана  $l_z$  со скоростью  $v_\infty$ . Задается отстояние  $h$  задней кромки  $B$  от экрана. Также для обобщения задачи М.А.Лаврентьева также можно предположить, что наибольшее значение кривизны в любой точке дуги  $AB$  не превышает заданной величины  $K_0$  ( $\max_{0 \leq s \leq L} K(s) \leq K_0$ ). Требуется найти форму

<sup>2</sup>Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Аэродинамическая оптимизация бесконечно-тонких крыловых профилей вблизи экрана. // Труды I Международной конференции <Модели механики сплошной среды, вычислительные технологии и автоматическое проектирование в авиа- и машиностроении>, Т.1 Казань, 1997. С. 53-57.

профиля из условия максимизации величины коэффициента подъемной силы.

В отличие от задачи §5 для функции  $\chi(z)$  добавится дополнительное граничное условие – условие непротекания экрана. В этом случае решение вспомогательной краевой задачи запишется в виде:

$$\chi(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}.$$

Задачи оптимизации ставились и решались подобным образом, как и в §5. В частности, при обобщении задачи М. А. Лаврентьева на случай наличия экрана получено хорошее совпадение найденных форм с дужками окружности  $r = 1/K_0$  или с контурами в неограниченном потоке.

В §7 поставлена и решена оптимизационная задача построения прямой гидродинамической решетки бесконечно-тонких профилей, обладающей минимальным коэффициентом сопротивления, при заданных параметрах на входе в решетку и выходе из неё.

Необходимо определить форму бесконечно-тонких профилей, составляющих прямую однорядную решетку шага  $t$  (фиг. 3,б) так, чтобы при заданных величине  $v_1$  и аргументе  $\theta_1$  скорости на бесконечности перед решеткой обеспечить необходимое значение аргумента скорости  $\theta_2$  за решеткой при минимальности сопротивления.

Функция  $\chi(z)$  в этом случае должна удовлетворять следующим граничным условиям: условиям на бесконечности до и после решетки; условиям непротекания контуров  $L_{zk}$ ; условию, заданности скачка величины скоростей на нижних и верхних сторонах  $L_{zk}$ , описываемый функцией  $\lambda(s)$ .

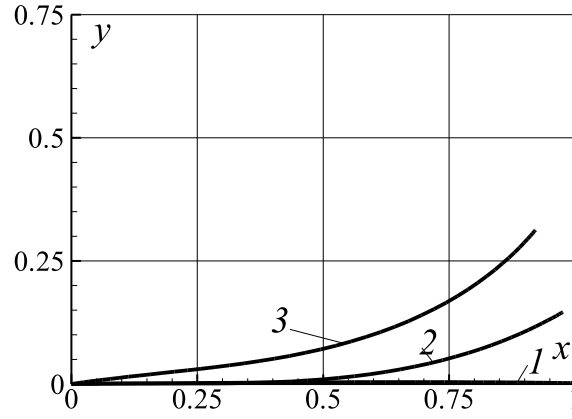
Если предположить, что форма  $L_{zk}$  известна, то функция  $\chi(z)$  запишется в виде

$$\chi(z) = \Phi(z) + C_0,$$

где

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2t} \int_{L_{z0}} \lambda(s(\zeta)) \operatorname{ctg} \frac{(\zeta - z)\pi}{it} d\zeta,$$

$$C_0 = \ln v_1 + \ln v_\infty - i(\theta_1 + \theta_\infty),$$



Фиг. 5.

$$\ln v_{\infty} = \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{2t} \int_{L_{z0}} \lambda(s(\zeta)) d\zeta \right], \quad \theta_{\infty} = \operatorname{Im} \left[ \frac{i}{2t} \int_{L_{z0}} \lambda(s(\zeta)) d\zeta \right].$$

Форма  $L_{z0}$  определяется с помощью итерационной процедуры, аналогичной примененной ранее в §5, §6. Так как в оптимизационной задаче параметры потока за решеткой заданы, то появляется дополнительное условие

$$C_0 = \ln v_2 - \ln v_{\infty} - i(\theta_2 - \theta_{\infty}),$$

которое приводит к ограничению на контур профиля  $L_{z0}$  и функцию  $\lambda(s)$

$$\frac{i}{2t} \int_{L_{z0}} \lambda(s(\zeta)) d\zeta = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{v_2}{v_1} - i(\theta_2 - \theta_1) \right].$$

На фиг. 5 и в табл. 2 приведены результаты расчетов по исследованию влияния величины  $\theta_2$  на форму профилей при  $v_1 = 1$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $t = 1$  с выполнением условия безотрывности обтекания. Значение  $\theta_2$  бралось равным: 0,  $\pi/8$ ,  $\pi/4$ . В результате при  $\theta_2 = 0$  получилась пластинка (линия 1), с увеличением  $\theta_2$  получились контуры с заданными значениями аргумента скорости на выходе (линии 2, 3). Значения коэффициента сопротивления  $C_x$  приведены в табл. 2. Видно, что с увеличением угла  $\theta_2$  контур изгибается сильнее, а величина коэффициента сопротивления увеличивается.



Таблица 2.

$\theta_2$	0	$\pi/8$	$\pi/4$
$C_x$	0.0126	0.0192	0.0326

В **третьей главе** разработанный метод второй главы распространен на случай оптимизации профиля, обладающего конечной (ненулевой) толщиной.

В §8 дана постановка и построено численно-аналитическое решение задачи определения формы телесного профиля в безграничном потоке, обладающего максимальной подъемной силой. Искомый непроницаемый крыловой профиль с контуром  $L_z^+ \cup L_z^-$  обтекается установившимся потоком ИНЖ (фиг. 6). Величина скорости  $v_\infty$ , а направление оси  $x$  совпадает с направлением скорости набегающего потока. Требуется определить форму контура крылового профиля, обладающего оптимальными аэродинамическими характеристиками.

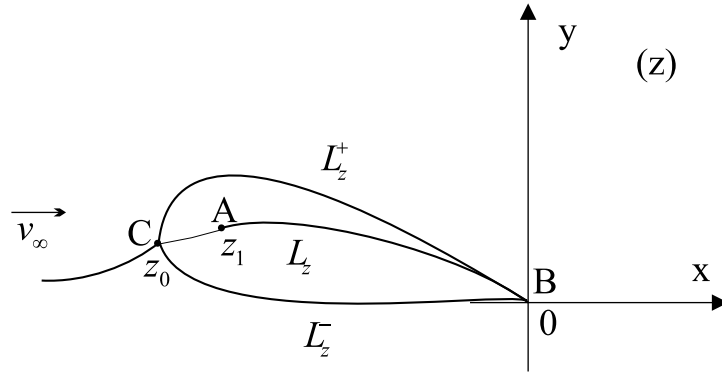
Использованный во второй главе способ моделирования крылового профиля позволял описывать течение около бесконечно-тонких профилей. Это достигалось тем, что величина скорости при переходе через линию  $L_z$  терпела скачок, а аргумент скорости изменялся непрерывно. Для того, чтобы распространить этот способ и для моделирования телесных профилей следует потребовать наличие разрыва на  $L_z$  и у аргумента скорости  $\theta$ . В этом случае контур  $L_z$  не будет непроницаемым. На некоторой его части жидкость будет вытекать, а на оставшейся – втекать. Поэтому при соответствующем задании скачка аргумента скорости возможно появление линии тока, разветвляющейся в некоторой критической точке  $C$  и замыкающийся в задней кромке  $B$ . Именно эту линию тока и можно принять за контур крылового профиля.

Для обеспечения указанного выше скачка функция  $\lambda(s)$  в выражении (3) должна быть комплексной

$$\lambda(s) = \lambda_1(s) - i\lambda_2(s) = \ln(v^+/v^-) - i(\theta^+ - \theta^-),$$

где  $\theta^+$  и  $\theta^-$  – значения  $\theta$  на верхней и нижней сторонах контура  $L_z$ ,  $s \in [0, 1]$  – дуговая абсцисса контура  $L_z$ , отсчитываемая от точки  $B$ .

При моделировании контура профиля в точку  $A(z = z_1)$  контура  $L_z$  помещается также источник интенсивности  $q$ . При этом в потоке появляется критическая точка  $C(z = z_0)$ , которую и примем за переднюю



Фиг. 6.

кромку профиля. Линии тока, выходящие из точки  $C$  и замыкающиеся в точке  $B$ , будут моделировать контур искомого крылового профиля.

Для решения задачи рассмотрим, как и ранее, функцию  $\chi(z)$  в виде (3). Эта функция должна удовлетворять следующим граничным условиям: условию заданности скорости на  $\infty$  и условиям скачка величины и аргумента скорости при переходе через  $L_z$ .

Аналогично методике решения задач **Главы II** при предположении, что форма  $L_z$  и функция  $\lambda(s)$  известны, решение краевой задачи с учетом расположения источника ( $z_1$ ) и критической точки ( $z_0$ ), запишется в виде:

$$\chi(z) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_z} \frac{\lambda(s(t)) dt}{t-z} + \ln \frac{(z-z_0)}{(z-z_1)}. \quad (10)$$

Для решения задачи в исходной постановке необходимо определить форму линии  $L_z$  (скелетную линию) и распределение  $\lambda(s)$  на ней. В данном случае  $L_z$  не является линией тока. Для её поиска предлагается использовать равенство

$$v_n^+(s) + v_n^-(s) = 0. \quad (11)$$

Введенное предположение (11) означает равенство расходов жидкости с верхней и нижней сторон скелетной линии профиля и позволяет записать условие на  $L_z$  в следующем виде

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{\exp(\lambda_1/2) \sin \theta^+ + \exp(-\lambda_1/2) \sin \theta^-}{\exp(\lambda_1/2) \cos \theta^+ + \exp(-\lambda_1/2) \cos \theta^-}, \quad (12)$$

где  $\lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda(s)$ ,  $\lambda_2 = \operatorname{Im} \lambda(s)$ ,  $\Theta$  – угол наклона касательной к  $L_z$ .

Представленная запись условия (12) позволит организовать итерационный процесс поиска скелетной линии  $L_z$ , аналогично процессу из §5.

Для получения крылового профиля с максимальной подъемной силой в качестве минимизируемого функционала можно взять выражение в виде (5). При этом также как и в §5, можно поставить разнообразные задачи оптимизации.

На фиг. 7 представлены результаты нахождения профиля, обладающего максимальным коэффициентом подъемной силы. Форма профиля показана сплошной линией на фиг. 7,а; соответствующее ему распределение скорости по верхней и нижней поверхности – на фиг. 7,б. В качестве тестовой проверки методом ОКЗА по полученному распределению скорости построен профиль, показанный штриховой линией на фиг. 7,а. В табл. 3 приведены полученные значения коэффициента подъемной силы  $C_y$  и угла атаки  $\alpha$ , в первой строке – результаты решения данной задачи, во второй строке – результаты решения ОКЗА по полученному распределению скорости. Из представленных результатов видно, что совпадение результатов удовлетворительное.

Таблица 3.

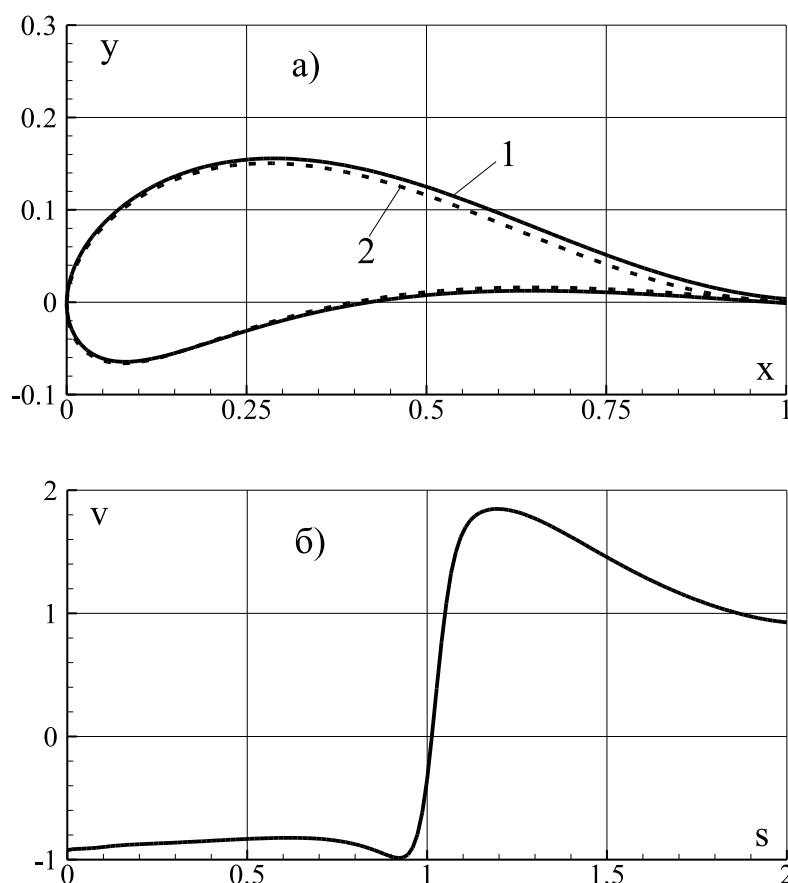
$N$	$C_y$	$\alpha$
1	1.579	8.53
2	1.587	8.82

В §9 дано распространение задачи из параграфа §8 на случай наличия плоского экрана. Искомый непроницаемый крыловой профиль с контуром  $L_z^+ \cup L_z^-$  обтекается установившимся потоком ИНЖ вблизи экрана  $l_z$  на расстоянии  $h$ . Величина скорости  $v_\infty$  задана, а направление оси  $x$  совпадает с направлением скорости набегающего потока. Требуется определить форму контура профиля, обладающего оптимальными аэродинамическими характеристиками.

Для моделирования экрана применим способ зеркального отражения профиля, относительно экрана. Для функции  $\chi(z)$  добавляется еще одно граничное условие – условие непротекания экрана  $l_z$ , в силу чего функция  $\chi(z)$  запишется в виде

$$\chi(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})},$$

где функция  $\Phi(z)$  определена формулой (10).



Фиг. 7.

Определение скелетной линии  $l_z$  (скелетную линию) и распределение  $\lambda(s)$  на ней происходит с использованием итерационной процедуры, описанной в §8. Аналогично предыдущему параграфу, поставлены и решены различные задачи оптимизации.

В **заклучении** кратко подведены итоги выполненной работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Постановки и методы решения задач отыскания формы высоконесущих профилей с кусочно-постоянным распределением скорости.
2. Постановки и методы решения задач определения форм с оптимальными аэродинамическими характеристиками (бесконечно-тонкие крыловые профили в неограниченном потоке, над экраном и профили гидродинамических решеток).
3. Методика оптимизации профилей конечной толщины.
4. Методики численной реализации построенных решений, результаты расчетов и сделанные на их основе выводы.

Следует отметить финансовую помощь Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№99-01-00365, 99-01-04029, 01-01-04004, 02-01-06141, 02-01-00061), позволившую ускорить написание диссертации.

### **СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

1. *Леонтьев В. Г.* О крыловых профилях постоянной скорости / *В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев* // Казань: Изд-во Казанск. мат. общ-ва. Мат. Всеросс. мол. научн. шк.-конф. по мат. модел., геом. и алгебре. Казань, 4-11 дек. 1997. С. 95-100.

2. *Леонтьев В. Г.* Аэродинамическое проектирование крыловых профилей с кусочно-постоянным распределением скорости / *В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев* // Тр. математического центра им. Н. И. Лобачевского. Т.3. Краевые задачи и их приложения. Казань: УНИПРЕСС 1999, с.335-339.

3. *Леонтьев В. Г.* Проектирование крылового профиля с кусочно-постоянным распределением скорости над плоским экраном / *В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев* // Сборник трудов XXI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, 17-22 апреля 2000 года: Изд-во МГУ, 2000. С.333-334.

4. *Леонтьев В. Г.* Проектирование крыловых профилей с кусочно-постоянным распределением скорости в неограниченном потоке и над плоским экраном / *В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев* // Современные проблемы аэрокосмической науки и техники // Международная научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов. Жуковский-Москва, 23-26 мая 2000 г. Тезисы докладов. ЦАГИ Авиационный печатный двор. С. 141-142.

5. *Леонтьев В. Г.* Построение модельных высоконесущих крыловых профилей с кусочно-постоянной скоростью на контуре вблизи экрана / *В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев* // Нелинейное моделирование и управление. Материалы международного семинара. Самара, 26-30 июня 2000 года. С.76-77.

6. *Леонтьев В. Г.* Оптимизация формы дужки, обтекаемой вблизи горизонтального экрана / *В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев* // Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.8. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы V Казанской международной летней школы-конференции. - Казань: Издательство "ДАС", 2001. - С.150-151.

7. Леонтьев В. Г. Высоконесящие модельные крыловые профили с двумя участками постоянной скорости на контуре / В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев // Известия РАН. МЖГ. 2001, № 6. С. 15- 20.

8. Леонтьев В. Г. Оптимизация бесконечно-тонких крыловых профилей вблизи экрана / В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев // Тезисы докладов 10-й Всероссийской конференции молодых ученых "Математическое моделирование в естественных науках." (26-29 сентября 2001 г.) - Пермь. Издательство Пермского государственного университета, 2001. - С.64-65.

9. Леонтьев В. Г. К проблеме построения высоконесящих модельных аэродинамических профилей / В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев // Известия Вузов. Авиационная техника. 2002. № 2. С. 24- 28.

10. Леонтьев В. Г. Численное решение задачи Лаврентьева для дужки вблизи горизонтального экрана // VIII Четаевская международная конференция "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением": Тезисы докладов. - Казань: Изд-во Ка-зан. гос. техн. ун-та, 2002 - С.267.

11. Леонтьев В. Г. Численное решение об оптимизации дужки вблизи горизонтального экрана // Гидродинамика больших скоростей. Тезисы докладов Международной летней научной школы. - Казань: Издательство казанского математического общества, 2002 - С.99-100.

12. Леонтьев В. Г. Численное решение задачи об оптимизации дужки вблизи горизонтального экрана // Современные проблемы аэрокосмической науки и техники. II Международная научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов. Жуковский, 8-12 октября 2002 г. Тезисы докладов. - Жуковский: ЦАГИ: Авиационный печатный двор, 2002. С. 126.

13. Леонтьев В. Г. Оптимизация формы бесконечно-тонких профилей прямой однорядной гидродинамической решетки / В. Г. Леонтьев, А. В. Поташев // Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий. Сборник материалов XV Всероссийской межвузовской научно-технической конференции, 20-22 мая 2003 г., С.48-50.

